**Interpolación Polinomial**

La **interpolación polinomial** es una técnica de interpolación de un conjunto de datos con un polinomio. Es decir, dado cierto número de puntos se pretende encontrar un polinomio que pase por todos los puntos.

Sean con se trata de obtener un Polinomio de grado ***n*** tal que para.

**Existencia y Unicidad del Polinomio Interpolante**

**Teorema:**

Si  son números reales distintos, entonces para valores arbitrarios  **,**el polinomio de interpolación de dichos datos **existe, y es único.**

**Teorema Unicidad:**

Sea el conjunto de puntos con . Entonces existe un **ÚNICO** Polinomio de grado **n** que interpola los puntos

**Demostración:**

Supongamos que existen dos polinomios distintos, **de grado n**, tales que

**Queremos ver que**

Sea , de modo que es un polinomio de grado menor o igual a n.

Por otro lado , para

Por lo tanto  **son raíces de** , lo que indica (por el Teorema fundamental del Álgebra) que es el polinomio nulo, esto es, H=0, de ahí se deduce que los polinomios P y Q no pueden ser distintos, de donde P = Q como queríamos demostrar.

Es decir, H es un polinomio de grado menor o igual que n con n + 1 raíces distintas, por tanto, por el teorema Fundamental del Algebra **H** es el polinomio nulo.

**Para demostrar la existencia**

Dados los puntos con , los polinomios de Lagrange correspondientes a dichos puntos para están dados por:

Es inmediato comprobar que, para cada , es un polinomio de grado exactamente . En consecuencia, es un polinomio de **grado n** como máximo y para cada

**Error en el Polinomio Interpolante**

**Teorema:**

Sea de clase y sean puntos que están en el dominio de con .

Entonces para cada que no pertenece al conjunto , existe un número tal que:

Donde es un número entre y y es el polinomio de **grado n** que interpola en los puntos

**Demostración:**

Para que no pertenece a , sea dada por

**Ahora:**

para , esto es, tiene n+2 raíces, luego por el **Teorema de Rolle** generalizado, existe un **punto** que pertenece al intervalo tal que (la derivada de orden en ese punto es 0)

**Por otro lado**

**De modo que la derivada de implica que:**

**De donde:**

El problema de encontrar un polinomio de **primer grado** que pasa por los puntos distintos  **y**  es el mismo que el de aproximar una función , para la cual y por medio de un polinomio de primer grado que interpole los valores de en los puntos dados o que coincida con ellos. Primero definiremos las funciones:

Y se define entonces:

**Como:**

**Tenemos:**

Así es la única función lineal que pasa por (x0, y0) y (x1, y1)

A fin de generalizar, consideremos la construcción de un polinomio de **grado**  que pase por los puntos.

En este caso para cada construimos un

Dado con , el polinomio

**Se denomina polinomio Interpolante de Lagrange**

**Demostrar que**

**Se tiene que:**

Si entonces todos los términos son y por lo tanto igual a 1.

También si entonces se produce que en algún término de la productoria, quedando , haciendo igual a 0 todo el producto. Entonces:

Por lo tanto en el punto e igual a 0 en todos los otros puntos

**Ejemplo:**

**Caso**

**Entonces:**

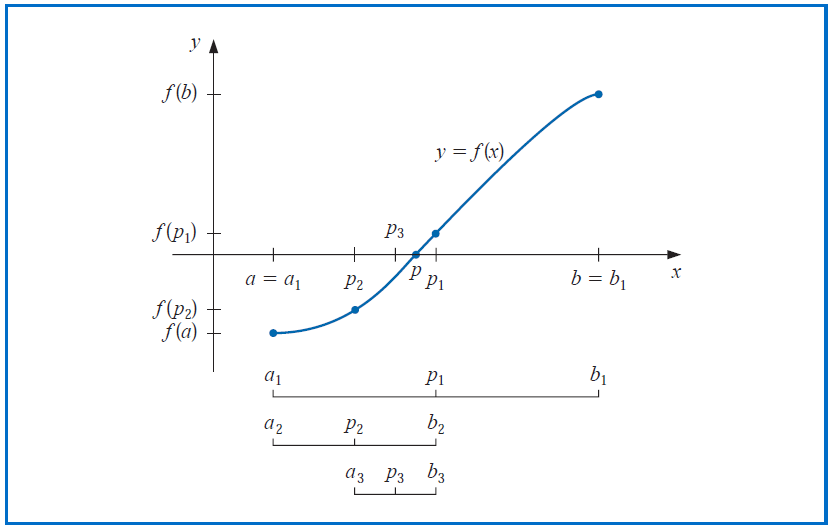
**Soluciones de Ecuaciones No Lineales**

(Búsqueda de Raíces)

**Método de la Bisección**

Supongamos que es una **función continua** definida en el **intervalo**  con y de signos diferentes. De acuerdo con el **Teorema del Valor Medio**, existe un **número**  en tal que . Por razones de simplicidad se supone que la raíz es única en ese intervalo

El método consiste en dividir varias veces por la **mitad** a los subintervalos de y localizar la mitad que contenga a



Siguiendo de esta manera, se obtiene una sucesión tal que el límite de que tiende a es

**Punto Fijo**

El problema de encontrar a una tal que , equivale a:

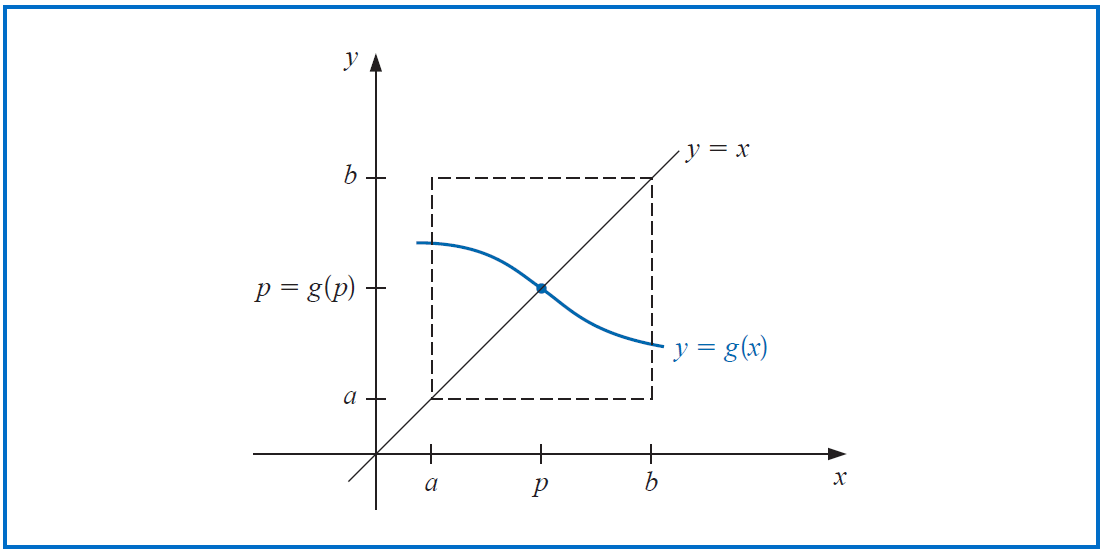
se llama **Punto Fijo**, un punto de la función que valuado en ese punto, da ese **punto**

**Definición Punto Fijo:**

Sea , un **punto**  en el dominio de tal que se denomina **Punto Fijo** de . Primero tenemos que ver si la función tiene un **Punto Fijo**:

**Teorema de la Existencia del Punto Fijo**

Sea , continua y tal que para todo **,** es decir, si es continua en el intervalo (la imagen) para todo entonces tiene un **Punto Fijo**.

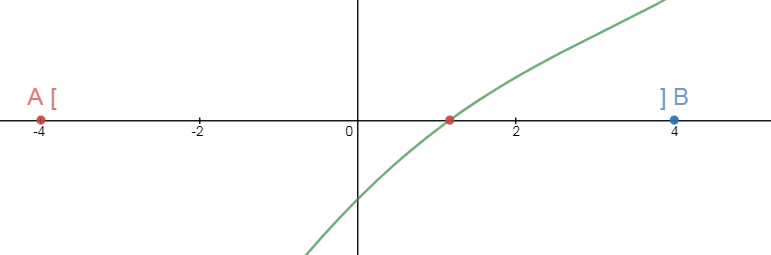


**Demostración:**

Sea , dada por , entonces es continua y

Por el teorema de los Valores Intermedios, existe un **punto**  tal que

**La función h:**



Esto es o equivalentemente , por lo tanto es un **Punto Fijo** de .

**Teorema de Unicidad del Punto Fijo**

Sea de clase tal que para todo Entonces tiene un único **Punto Fijo** en el **intervalo**

**Demostración**

La existencia ya fue demostrada. Para ver la **unicidad** asumamos que y son **puntos fijos** de en , entonces

Por el **Teorema del Valor Medio** existe un número entre :

**Quedando:**

Si **,** entonces **,** de modo que de la desigualdad anterior tenemos , lo que contradice la hipótesis, por lo tanto la suposición es falsa, en consecuencia:

**p = q**

**Como queríamos demostrar al principio**

**Teorema de Punto Fijo**

(Convergencia al punto fijo)

Sea de clase y para todo ( constante positiva )

Entonces para cualquier número en , la sucesión definida por , converge al único **Punto Fijo** en

**Ahora**

**Y en General:**

Sean  **y ∈** con , entonces:

Como ,, por lo tanto , de modo que la **Sucesión ,** es una **Sucesión de Cauchy** en y por consiguiente es **Convergente**, esto es, existe tal que

Pero , esto es, es el **Punto Fijo** de en el intervalo

**Error Iteración Punto Fijo**

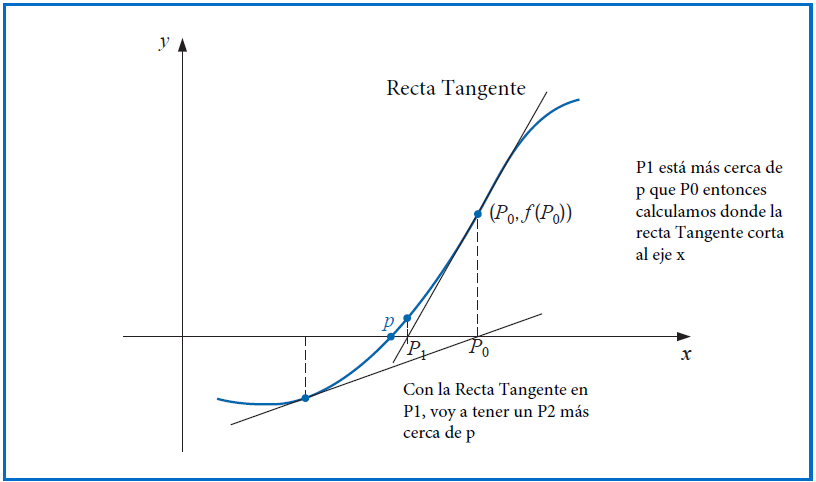
De **clase** , para todo ; dada por es una sucesión de **Cauchy**, esto es:

**Entonces:**

**Fórmula para acotar el Error**

**Método de Newton-Raphson**

Este método sirve para la búsqueda de raíces, se tiene que encontrar un donde



Para calcular un **valor cercano a la raíz** debemos **elegir un**  **cercano** a la misma que esté dentro del intervalo a analizar.

Luego buscamos **la recta tangente a**  cuando . Usamos la forma de una recta

Donde sabemos que es la **pendiente** que en este caso está dada por:

Si analizamos desde entonces tenemos , despejamos y reemplazamos en la fórmula:

De esta manera obtenemos la **ecuación a la recta tangente:**

Ahora **buscamos la raíz** de la ecuación anterior para **obtener el**  que va a ser

**Despejamos :**

Y así sucesivamente calculamos los demás puntos

**De forma más general:**

Entonces siguiendo este método obtenemos una **sucesión** , donde y

**Orden de Convergencia para una Sucesión**

**Definición:**

Sea una sucesión en . Diremos que la misma **converge** **asintóticamente** al **punto** con orden de convergencia si:

Donde y son constantes positivas ( se denomina constante asintótica)

**Teorema:**

Sea de clase , un **Punto Fijo** de y (todas las derivadas de en valen 0) para y

Entonces la sucesión dada por , converge a con orden de convergencia igual a y **constante asintótica**:

**Demostración:**

**Por el teorema de Taylor:**

Pero por la demostración , entonces lo anterior es igual a:

**Valuando en tenemos:**

**Esto es:**

**De donde:**

**Tomando límite para tenemos:**

**Convergencia del Método de Newton:**

Sea ; donde y

**Derivamos**

**Corolario:**

Si es **una raíz simple** de y , entonces el método de Newton-Raphson tiene **convergencia cuadrática**